



جامعة موارد  
للعلوم والتكنولوجيا  
THB

Evaluation des performances des systèmes manufacturiers Kanban par modèles SWN  
Evaluation des performances des systèmes manufacturiers Kanban par modèles SWN  
Evaluation des performances des systèmes manufacturiers Kanban par modèles SWN

# Rapport de Recherche



**Evaluation des performances des systèmes  
manufacturiers Kanban par modèles SWN**

**Nabila SALMI, Malika IOUALALEN**

**LSI-TR-1505**

**Décembre 2005**

**FACULTE ELECTRONIQUE & INFORMATIQUE**  
Département informatique  
El Alia BP n°32 Bab Ezzouar 16111 Alger.  
Tél / Fax : 213 (0) 21 24 79 17 - 24 76 07

# Evaluation des performances des systèmes manufacturiers Kanban par modèles SWN

Nabila SALMI<sup>1</sup>

Malika IOUALALEN<sup>2</sup>

LSI-Département Informatique, Faculté d'Informatique & Electronique, USTHB  
El Alia BP n°32, Bab Ezzouar, Alger, Algérie.

<sup>1</sup> Email: salmi@lsi-usthb.dz

<sup>2</sup> Email: ioualalen@lsi-usthb.dz

**Résumé.** Les réseaux de Petri stochastiques sont préconisés pour l'analyse des performances des systèmes informatiques et industriels. En particulier, les réseaux de Petri stochastiques bien formés (SWN) se sont avérés adéquats pour l'évaluation des performances des systèmes caractérisés par des symétries de comportement. Cette classe de réseaux de haut niveau permet de représenter les symétries intrinsèques à un système d'une manière compacte, et diminuer ainsi la complexité d'analyse, en recourant à l'agrégation des états.

Dans ce papier, nous nous intéressons à évaluer des systèmes manufacturiers industriels de type KANBAN. Ces systèmes ont été proposés dans le but de rendre optimal son contrôle vis-à-vis de la demande client et des aléas. Comme l'analyse des performances des systèmes Kanban s'avère difficile compte tenu de la taille de l'espace d'états, et comme ces systèmes présentent des symétries dans leur fonctionnement, il est intéressant de profiter des avantages du modèle SWN afin de modéliser et évaluer des systèmes KANBAN. Pour cela, l'objectif de ce papier est d'évaluer les systèmes Kanban à l'aide d'une modélisation pas réseaux SWN.

**Mots-clé.** Evaluation des performances. Réseaux de Petri Stochastiques bien formés (SWN). Systèmes Kanban. Modélisation. Agrégation d'états.

## 1. Introduction

Les réseaux de Petri Stochastiques ont été largement utilisés pour l'évaluation des performances des systèmes informatiques, des réseaux de télécommunication et des systèmes de production. Ce modèle permet d'une part de représenter facilement les caractéristiques de synchronisation, parallélisme, et communication. D'autre part, il fournit des méthodes d'analyse qui permettent notamment le calcul d'indices de performance des systèmes.

Cependant, lorsqu'on modélise et évalue les systèmes informatiques ou autres (industriels par exemple), les modèles obtenus sont fréquemment de taille importante, ce qui génère en phase d'analyse une infinité d'états, causant ainsi le phénomène, connu sous le nom *d'explosion combinatoire*.

Parmi les méthodes présentées dans la littérature remédiant à ce problème, on trouve *l'agrégation markovienne* qui consiste à regrouper les états du système suivant une relation d'équivalence en sous-ensembles ayant des comportements stochastiques équivalents. L'objectif serait alors de simplifier l'analyse du système en analysant les agrégats, puis en déduisant de cette analyse des résultats sur le système d'origine.

La technique d'agrégation est effectuée sur la base de la connaissance de symétries de comportement pour différents modules ou objets composant le système. Les symétries sont fidèlement représentées à l'aide d'une classe de réseaux de Petri : les réseaux de Petri *colorés* [12]. Cependant, il est difficile d'obtenir directement de ce type de réseaux des résultats d'analyse, sans avoir recours au dépliage du réseau coloré et sans revenir au réseau de Petri ordinaire équivalent. De plus, il n'est pas possible d'automatiser le calcul des états agrégés du système modélisé, et donc, on ne peut tirer profit des symétries du système.

Par conséquent, une classe spéciale de réseaux de Petri de haut niveau a été définie : les *réseaux de Petri stochastiques bien formés (Stochastic Well Formed Net ou SWN)* [11]. L'intérêt de ce modèle réside dans deux points :

- D'une part, il permet de représenter d'une manière compacte les symétries se trouvant dans un système, et

- D'autre part, il autorise le calcul **automatique** d'une chaîne de Markov à temps continu agrégée de la chaîne sous-jacente du réseau non coloré équivalent.

Dans ce papier, nous nous intéressons à évaluer des systèmes manufacturiers industriels de type KANBAN [5]. Ce type de systèmes manufacturiers a été développé par les japonais chez TOYOTA, dans le but de rendre optimal le contrôle du système manufacturier vis-à-vis de la demande client et des aléas, et ce, en limitant les stocks, en réduisant les coûts de production, mais aussi en suivant au mieux la demande des clients et sa fluctuation.

Afin de s'assurer de l'optimisation du contrôle d'un système KANBAN, il est indispensable de recourir à la modélisation et l'évaluation des performances du système. A cet effet, des méthodes analytiques ont été proposées dans la littérature [13], [14], [10], s'appuyant sur une modélisation stochastique des systèmes de contrôle Kanban. Toutefois, il a été remarqué que la taille de ces systèmes peut augmenter très rapidement selon la fluctuation de la demande du client, le nombre et type de produits à fabriquer, et aussi le nombre de machines utilisées durant le processus manufacturier lui-même. De ce fait, le modèle résultant n'est résolu que par des méthodes d'approximation. D'autres alternatives plus intéressantes et assez exactes ont été présentées [2], [9]. Elles considèrent le système Kanban comme étant un réseau de files d'attente multiclassées, pouvant être analysés par des méthodes d'approximation en forme produit.

D'autre part, des travaux basés sur les réseaux de Petri ordinaires, colorés et stochastiques colorés ont été effectués [15], [16], [17] en parallèle aux précédents.

Etant donné les difficultés d'analyse des systèmes kanban, le besoin en de nouvelles approches d'analyse reste toujours éprouvé.

Comme les systèmes Kanban présentent des symétries de comportement, une approche intéressante récente consiste à utiliser le modèle des réseaux de Petri Stochastiques bien formés (SWN), afin de tirer profit des agrégations possibles des états. Dans cet objectif, de récents travaux ont été proposés dans la littérature [8], [7]. Ces travaux ont montré l'efficacité du modèle SWN et la réduction du nombre d'états obtenus à travers une comparaison entre une modélisation par réseau de Petri stochastique généralisé et réseau SWN.

Afin d'étendre ces travaux, nous nous proposons dans ce papier d'étudier les différents types de systèmes de contrôle manufacturier de Kanban, puis d'en faire une modélisation et une évaluation de leur performances. Pour cela, nous présentons d'abord les RDPS bien formés ou Stochastic Well Formed Nets (SWN). Puis, nous donnons les principes sur lesquels se basent les systèmes de contrôle KANBAN, ainsi que les types trouvés dans la littérature. Enfin, nous proposons une modélisation des différents types de systèmes KANBAN présentés, et une évaluation de leurs performances.

## 2. Réseaux de Petri bien formés ou SWN

### 2.1. Concepts préliminaires

Le modèle Réseau de Petri bien formé ou Stochastic Well Formed Nets (SWN) [11] est un réseau coloré, muni d'un typage structuré des places et des transitions, dans lequel est donné le type des objets présents dans une place ou instanciés lors du franchissement d'une transition. Les objets du système sont regroupés en **classes**. Les classes d'objets peuvent elles-mêmes être associées pour former des **domaines de couleur**. Un domaine de couleur représente un type d'objet, et correspond à un produit cartésien de **classes de couleurs de base**. Des fonctions opèrent sur ces domaines de couleur en vue de modifier l'état du réseau. Formellement :

1. **Une classe d'objets** regroupe les entités de même nature d'un système. Par exemple, la classe des mémoires. Elle peut être ordonnée (une relation d'ordre existe entre les objets qui la composent). Soit  $C$  l'ensemble des classes de couleurs de base :

$$C = \{C_1, \dots, C_h, C_{h+1}, \dots, C_n\}, 0 \leq h \leq n, \text{ où } i \neq j \Rightarrow C_i \cap C_j = \emptyset \text{ (classes disjointes)}$$

Une classe contenant des objets de même type peut être divisée en **sous-classes statiques**, où chaque sous-classe regroupe des objets ayant exactement les mêmes caractéristiques. La partition d'une classe d'objets  $C_i$  en  $n_i$  sous-classes statiques est définie par :  $C_i = \cup_{q=1}^{n_i} D_{i,q}$

2. **Un domaine de couleur** est formé d'un produit cartésien quelconque de classes d'objets, dites **classes de couleurs de base**. Une couleur est en général une association d'objets éventuellement de même type. Par exemple, une couleur peut définir une association (serveur, client, ressource). Les classes de base seront (serveurs, clients, ressources).

Formellement, soit  $I=\{1, \dots, n\}$  l'ensemble des indices des classes d'objets, et soit  $J=\{e_1, \dots, e_n\}$  où  $e_i$  désigne le nombre d'occurrences de  $C_i$  dans le produit cartésien.

Un domaine de couleurs est alors défini comme suit :  $C_J = \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^{e_i} C_i = \prod_{i=1}^n C_i^{e_i}$

Une couleur  $c=(c_1^{e_1}, \dots, c_1^{e_1}, \dots, c_i^{e_i}, \dots, c_i^{e_i}, \dots, c_n^{e_n}, \dots, c_n^{e_n})$  de  $\prod_{i=1}^n C_i^{e_i}$  est notée  $(c_i^j)_n^{e_i}$ .

3. **Un prédicat** est une expression booléenne, pouvant être associée à une transition (**une garde**) afin de restreindre son franchissement, ou à un arc (**un prédicat**) pour calculer le nouveau marquage. Il est évalué sur les couleurs instanciées dans le domaine de couleur de la transition correspondante.

4. **Une fonction d'arc** définit le comportement des objets lors du franchissement d'une transition. Pour un arc reliant une place  $p$  à une transition  $t$ , elle est définie par :

$$W^*(p,t) : \text{Bag}(C(t)) \rightarrow \text{Bag}(C(p))$$

$$W^*(p,t) = \sum_k \delta_k \cdot g_k$$

où  $\delta_k$  est un entier positif,  $g_k$  est une fonction gardée, et  $\text{Bag}(E)$  est l'ensemble des multi ensembles sur  $E$  :

$\text{Bag}(E) = \{x = (x(e))_{e \in E} / \forall e \in E, x(e) \in \mathbb{N}\}$  (un multi ensemble est un ensemble qui peut contenir plusieurs occurrences du même élément).

## 2.2. Réseaux de Petri bien formés

### Définition 1 : Réseau bien formé (WN) [11]

Un réseau bien formé (Well-formed Petri Net WN)  $S$  est un tuple  $(P, T, C, J, \text{Pre}, \text{Post}, \text{Inh}, \text{Guard}, \text{Pri}, M_0)$  avec :

- $P, T$  : ensembles finis respectivement des places et transitions,
- $C = \{C_i / i \in I = \{1, \dots, n\}\}$  : ensemble des classes de couleurs de base ;  $C_i$  peut être partitionnée en  $n_i$  sous-classes statiques :  $C_i = \cup_{q=1}^{n_i} D_{i,q}$ ,
- $J : P \cup T \rightarrow \text{Bag}(I) : C(t) = \prod_{i \in J} C_i^{J(t)}$  est le domaine de couleurs du nœud  $r$ ,
- $\text{Pre}, \text{Post}, \text{Inh}$ : fonctions d'incidence arrière, avant et d'inhibition de  $C(t)$  dans  $\text{Bag}(C(p))$  sont des fonctions d'arc,
- $\text{Guard}(t) : C(t) \rightarrow \{\text{true}, \text{false}\}$  est le prédicat standard associé à la transition  $t$ . Par défaut,  $\text{Guard}(t)$  est la fonction constante de valeur **true**  $\forall t \in T$ ,
- $\text{Pri} : T \rightarrow \mathbb{N}$  est la fonction de priorité. Par défaut, on a :  $\forall t \in T, \text{Pri}(t) = 0$ ,
- $M_0 : M_0(p) \in \text{Bag}(C(p))$  est le marquage initial de  $p$ .

### Définition 2 : Règle de franchissement d'un Réseau bien formé [11]

Une transition  $t$  est franchissable pour une couleur  $c$  dans le marquage  $M$  (noté  $M[t, c >]$ ) ssi :

1. Règle de franchissement sans priorité :  $\forall p \in P, \text{Pre}(p,t)(c) \leq M(p) \wedge \text{Inh}(p,t)(c) > M(p) \wedge \text{Guard}(t)(c)$ .
2.  $\forall t'$  avec  $\text{Pri}(t') > \text{Pri}(t), \forall c' \in C(t')$ , l'instanciation  $t'(c')$  ne vérifie pas la condition 1 (pas de transition de priorité supérieure franchissable sans priorité).

Le franchissement de l'instance de transition  $t(c)$  donne le marquage  $M'$  :

$$\forall p \in P, M'(p) = M(p) + \text{Post}(p,t)(c) - \text{Pre}(p,t)(c).$$

Le concept de réseau bien formé a été étendu au cas de réseau de Petri stochastique comme suit.

### Définition 3 : Réseau de Petri Stochastique bien formé SWN [11]

Un **réseau de Petri Stochastique bien formé (SWN)** est un couple  $(S, \theta)$  tel que :

- $S$  est un réseau de Petri bien formé, et

-  $\theta$  est une fonction définie sur  $T$  telle que :  $\theta(t) : C^{\sim}(t) \times \text{Bag}(C^{\sim}(p)) \rightarrow \mathbb{R}^+$

Si  $\text{pri}(t) > 0$ ,  $t$  est immédiate et  $\theta(t)(c^{\sim}, M^{\sim})$  représente le poids de  $t$ . La probabilité de tir de  $t(c)$  en  $M$  est :

$$\theta(t)(c^{\sim}, M^{\sim}) / \sum_{t'(c), M[t'(c)] >} \theta(t')(c^{\sim}, M^{\sim})$$

Si  $\text{pri}(t) = 0$ ,  $t$  est temporisée et  $\theta(t)(c^{\sim}, M^{\sim})$  est la vitesse de tir moyenne de toute instance franchissable en  $M$ .

Une fois les réseaux SWN présentés, nous détaillons dans la suite les systèmes manufacturiers.

### 3. Les systèmes manufacturiers

Depuis plusieurs dizaines d'années, l'homme cherche à produire mieux, plus vite et surtout moins cher. En particulier, les techniques utilisées peuvent avoir un effet sur la fabrication des produits dans les systèmes manufacturiers industriels.

Parmi les paramètres importants qui influent sur la fabrication de produits, on trouve le choix d'un mécanisme de contrôle du flux de matières ou produits à travers le système manufacturier.

Dans les systèmes manufacturiers traditionnels, une approche de contrôle de production dite **Push** était utilisée : cette approche consistait à « pousser » le stock en matériaux bruts à travers le système de production pour produire, et stocker les produits finis pour satisfaire des demandes futures.

Dans les années 70, une technique parmi les plus connues aujourd'hui dans les systèmes manufacturiers, a été développée : la technique **Just-In-Time (JIT)**. Les systèmes JIT ont connu un immense succès au Japon, et même après, de nombreuses compagnies en dehors du Japon l'ont implémentée. L'objectif principal de cette technique est de produire la bonne quantité de produits dans la bonne place au bon moment, en maintenant un taux minimal de travail en cours (Work-In-Process WIP, ie le nombre de produits en cours de fabrication) et un stock minimal de produits finis. Cette technique vise l'élimination du gaspillage, la réduction du coût de la production et le contrôle total de la qualité. L'approche utilisée est dite **Pull** : les produits sont fabriqués en réponse à une demande spécifique.

Afin de maintenir le contrôle de la production, les **Systèmes Kanbans** sont utilisés.

#### 3.1. Qu'est-ce que les systèmes Kanban ?

Un système Kanban est un système manufacturier décomposé en étages communiquant en série, chaque étage correspond à un processus manufacturier appliqué aux produits. Chaque pièce à assembler doit transiter par tous les étages (les processus manufacturiers correspondants), jusqu'à atteindre le dernier étage où elle devient produit fini. L'objectif visé par ce système est de rendre optimal son contrôle vis-à-vis de la demande client et des aléas, en limitant les stocks, en réduisant les coûts de production, mais aussi en suivant au mieux la demande des clients et sa fluctuation. Pour ce faire, il est nécessaire de contrôler la sortie des produits d'un étage afin qu'il n'y ait pas de goulet d'étranglement tout au long du système et que le débit en produits finis du dernier étage corresponde à la demande cliente. Ce contrôle est réalisé par un mécanisme d'*autorisations* à produire pour un étage donné, qui sont appelées **Kanban** (en japonais, signe visible ou carte). On parle alors de **système de contrôle Kanban ou KCS** [5].

##### **Définition : Système de Contrôle Kanban ou KCS (Kanban Control System)**

Un système de contrôle Kanban (KCS) est un système manufacturier dont le contrôle du flux des produits à travers ses étages est régi par un mécanisme de contrôle par Kanbans. A chaque étage est associé un nombre fini de kanbans représentant le nombre de produits pouvant être présents dans l'étage à un instant donné. Un produit n'est libéré vers l'étage suivant que si un kanban est disponible à l'entrée de cet étage destinataire. Le produit sera alors libéré en même temps que le kanban qui lui a été associé dans l'étage courant, puis traité par le processus manufacturier de l'étage suivant.

### 3.2. Composants d'un système manufacturier Kanban KCS

Dans beaucoup de systèmes manufacturiers, la fabrication de produits est décomposée en étages. Chaque étage peut être assimilé à un système de production et de stockage, constitué de :

- Un tampon d'entrée (zone de stockage, input buffer),
- Un processus manufacturier, et
- Un tampon de sortie (output buffer).

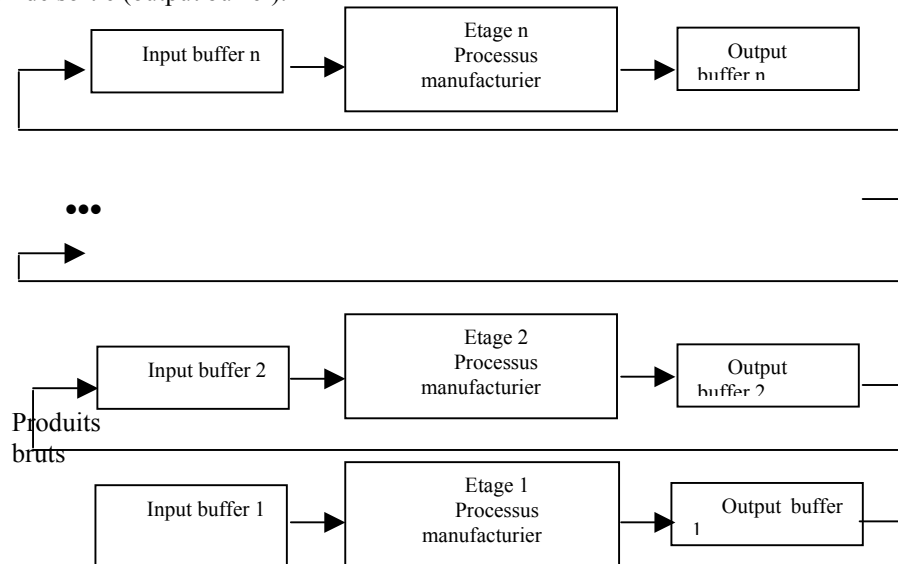


Fig1. Composants d'un système manufacturier

Le processus manufacturier exécute des opérations sur les produits qu'il reçoit du tampon de sortie de l'étage précédent, fabrique de nouveaux produits et les stocke dans le tampon de sortie associé à son étage. En général, un processus manufacturier est composé d'un ensemble de machines, par exemple une ligne d'assemblage ou une cellule d'assemblage.

Chaque ligne d'un étage est contrôlée par un nombre fixe de kanbans, qui limitent le nombre de produits qu'elle peut traiter simultanément. Ce mécanisme de kanbans permet un contrôle fin du système.

Pour qu'une pièce entre dans un étage, un kanban de cet étage doit être libre. La pièce peut alors entrer dans l'étage, accompagnée du kanban, et le processus manufacturier lui est appliqué. A la fin du processus, le couple pièce/kanban est déposé dans le tampon de sortie de l'étage.

Plusieurs types de système KCS existent. Selon le type du système, le kanban est libéré avant ou après l'entrée de la pièce dans l'étage suivant, puis il est replacé à nouveau en entrée de l'étage où il peut alors autoriser l'arrivée d'une nouvelle pièce.

Globalement, le mécanisme de contrôle par kanbans déclenche la production dans les différents étages en réaction à **la demande actuelle**, au travers de boucles de retour des kanbans d'autorisation de production. Ils coordonnent en effet la production des différents étages avec la demande actuelle.

### 3.3. Types de systèmes Kanban [1]

Les systèmes de contrôle KCS ont été introduits pour limiter le nombre de produits fabriqués simultanément, en se basant sur les demandes des clients.

Afin d'être plus performant, deux autres mécanismes ont été proposés :

- Les **Systèmes de Contrôle Kanban Généralisés GKCS (Generalized Kanban Control System)** [3], [20], et
- Les **Systèmes de Contrôle Kanban Etendus EKCS (Extended Kanban Control System)** [6].

Dans la suite, nous supposons qu'un système manufacturier peut fabriquer plusieurs types de produits. On dit alors que le système est **multiproduit**. On considère que les produits gardent leur type durant tout

leur trajet à l'intérieur du système. Comme chaque produit nécessite un kanban pour être traité à un étage, deux types de kanbans peuvent être utilisés :

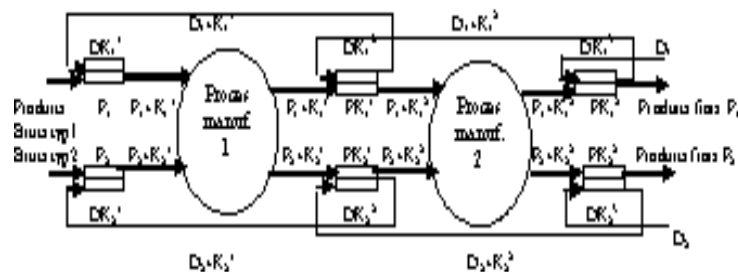
- des kanbans dédiés à chaque type de produit. On parle alors de Système à **kanbans dédiés**, et
- des kanbans partagés pour tous les types de produits. On parle alors de Système à **kanbans partagés**.

Nous décrivons à travers cette section les caractéristiques de chacun des types de système KCS, GKCS et EKCS. Pour une homogénéité et une généralité de la description, nous présentons ces systèmes dans le cas multiproduit, multiétage et à kanbans dédiés.

### 3.3.1. Système de Contrôle Kanban KCS

Un système manufacturier KCS est décomposé en  $N$  étages et ne dépend que d'un seul paramètre : le nombre de kanbans par étages et éventuellement par produit s'ils sont dédiés.

Prenons le cas où le système est multiproduit et fabrique  $R$  types de produits. Chaque étage  $i$  possède  $L$  lignes d'assemblages identiques, et chaque ligne est capable de traiter tous types de produits. Pour un étage donné, toutes les lignes possèdent les mêmes comportements. Nous schématisons ce système par la figure suivante :



**Fig.2 : KCS multiproduit à 2 étages**

Pour chaque type de produit (noté  $p_i$  sur la figure 2) seront associés à chaque étage un tampon d'entrée et un tampon de sortie. Un tampon peut stocker les demandes (notées  $D_i$ ), les produits ( $P_i$ ) et les kanbans (notées  $K_i^j$ , où  $i$  désigne le numéro ou type du produit et  $j$  le numéro de l'étage). Initialement, les tampons de sortie de chaque étage doivent contenir au moins un produit, et ce pour pouvoir satisfaire la 1<sup>ère</sup> demande.

Les demandes  $D_p$  de produits de type  $p$  sont envoyées dans le tampon de sortie du dernier étage. Puis, il y a vérification de la disponibilité d'un produit dans cet étage. Deux possibilités peuvent exister :

- Si un produit fini est disponible à cet étage, il est directement servi au client après avoir libéré le kanban associé. Ce kanban est alors transféré en amont vers le buffer d'entrée de cet étage, en même temps qu'une demande de production d'un nouveau produit de l'étage. On dit que le kanban est attaché à la demande.
- Si aucun produit fini n'est disponible dans le buffer de sortie du dernier étage, la demande est remise en commande, et reste dans ce buffer jusqu'à l'arrivée d'une paire produit fini/ kanban de cet étage après être passé par son processus manufacturier. A ce moment, le produit fini est donné au client après libération du kanban correspondant.

Ce principe est appliqué à tous les étages à chaque fois qu'une demande accompagnée d'un kanban arrive à l'étage. La vérification de la disponibilité du produit dans le tampon de sortie de l'étage se fait de la même manière. Toutefois, pour traiter le produit disponible, le kanban accompagnant la demande est détaché, puis rattaché au produit à traiter. Le processus manufacturier traite alors la paire produit /kanban et à la fin de cette fabrication, un nouveau produit auquel est toujours attaché le kanban est déposé dans le tampon de sortie de l'étage.

En conséquence, les éléments en mouvement sont de trois types : les produits, les demandes et les kanbans autorisations de production :

- Les produits se déplacent du début vers la fin du système, en commençant en matières premières, puis en étant modifiés par chaque étage, en attendant entre temps dans les tampons de sortie de chaque étage, et finalement dans celui du dernier étage, prêts à être consommés comme produits finis.

- Les demandes se déplacent dans le sens inverse remontant l'information d'un besoin de production d'un produit d'un certain type, afin de remplacer le produit consommé par la nouvelle demande. Lorsqu'une demande pour un produit fini de type  $p$  arrive à la fin du système, elle est transmise à l'entrée de chaque étage, les uns après les autres en commençant par le dernier. Le temps de propagation d'une demande dépend du système implanté.

- Les autorisations de productions (kanbans) sont des quantités fixes de cartes associées à chaque étage. Les kanbans se déplacent attachés aux produits ou aux demandes, limitant ainsi le taux de travail en cours (WIP) de chaque étage.

Afin de généraliser ce système, les systèmes de contrôle Kanban généralisés (GKCS) et étendus (EKCS) ont été introduits. Ils sont décrits ci-après.

### 3.3.2. Système de Contrôle Kanban Généralisé GKCS [3], [20]

Dans ce type de système, à chaque étage sont associés  $K^i$  kanbans et un niveau de stock de base  $S^i$ . Le schéma correspondant au fonctionnement est comme suit :

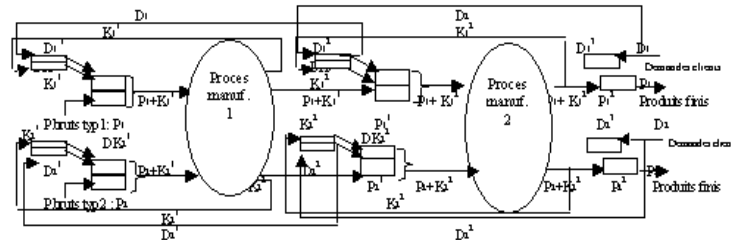


Fig.3 : GKCS multiproduit à 2 étages

Initialement, le buffer de sortie de chaque étage  $i$  contient  $S^i$  produits finis de l'étage (sans kanbans attachés), et à l'entrée, on a  $K^i$  kanbans de l'étage, notées  $K_i^j$ , où  $i$  désigne le numéro ou type du produit et  $j$  le numéro de l'étage (sans demandes attachées aux kanbans). Tous les autres buffers sont vides sauf le buffer d'entrée du 1<sup>er</sup> étage qui contient des produits bruts.

Lorsqu'une demande arrive, elle est divisée en deux demandes : une qui va dans le buffer de sortie du dernier étage demandant la libération d'un produit fini pour le client, et une seconde demande qui rejoint le buffer de sortie de l'étage précédant le dernier, demandant ainsi le lancement de la fabrication d'un nouveau produit de cet étage. Les demandes sont également notées  $D_i^j$ , où  $i$  désigne le numéro ou type du produit et  $j$  le numéro de l'étage.

A l'arrivée de la demande au dernier étage :

- Soit un produit fini est disponible à cet étage, il est directement libéré au client.
- Soit aucun produit fini n'est disponible dans le buffer de sortie du dernier étage, la demande est transférée vers les étages précédents, puis elle reste dans ce buffer jusqu'à l'arrivée d'un produit fini de cet étage.

Quant aux autres étages, à chaque fois qu'une demande arrive à un étage  $i$ , si un kanban est disponible à l'entrée de l'étage, une demande est immédiatement transmise à l'étage  $i-1$ , et la paire kanban/demande attendent la fabrication d'un produit de cet étage  $i-1$  : si un produit est disponible, il est utilisé avec le kanban de l'étage  $i$  pour cet étage. Sinon le kanban attend jusqu'à l'arrivée d'un nouveau produit de l'étage  $i-1$ .

S'il n'y a pas de kanban disponible, la demande est transférée en arrière et attend jusqu'à la libération d'un kanban de cet étage  $i$ .

### 3.3.3. Système de Contrôle Kanban Etendu EKCS [6]

Dans ce type de système, le buffer de sortie d'un étage  $i$  contient des paires de produits finis et de kanbans de l'étage. De plus, à l'entrée de chaque étage, sont stockées les demandes pour la production de



produits de l'étage  $i$  d'une part, et d'autre part les kanbans libres de l'étage. Le fonctionnement est schématisé ci-après :

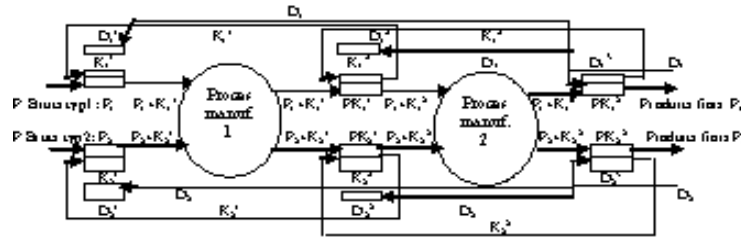


Fig.4 : EKCS multiproduit à 2 étages

Comme pour le cas GKCS, à chaque étage sont associés  $K^i$  kanbans et un niveau de stock de base  $S^i$ . Initialement, le buffer de sortie de chaque étage  $i$  contient  $S^i$  produits finis de l'étage auxquels sont attachés des kanbans. et à l'entrée, on a  $K^i - S^i$  kanbans libres de l'étage. Tous les autres buffers sont vides sauf le buffer d'entrée du 1<sup>er</sup> étage qui contient des produits bruts.

Lorsqu'une demande arrive, elle est divisée en  $N+1$  demandes ( $N$  étant le nombre d'étages du système): une vers le dernier étage demandant la libération d'un produit fini pour le client, et une vers l'entrée de chaque étage demandant le lancement de la production d'un nouveau produit de l'étage.

Lorsque la demande arrive au dernier étage, si un produit est disponible, il est libéré vers le client après libération du kanban qui lui est attaché, et qui est transféré vers le buffer d'entrée de l'étage. Sinon, la demande attend l'arrivée de nouveaux produits finis.

Lorsque la demande arrive à un étage  $i$  autre que le dernier, si une paire produit/kanban est disponible dans le buffer de sortie de l'étage  $i-1$ , le produit est immédiatement détaché du kanban vers l'étage suivant. Un kanban de l'étage suivant est enlevé de l'entrée de l'étage suivant et attaché à ce produit, puis donné au processus manufacturier. En même temps, le kanban de l'étage  $i-1$  est transféré à l'entrée de cet étage  $i-1$ .

Si aucune paire produit/kanban de l'étage  $i-1$  n'est disponible, ni de kanban de l'étage  $i$  disponible, la demande attend l'arrivée de nouveaux produits finis ou la libération de kanbans ou les deux événements.

Une fois les systèmes décrits, nous présentons dans la suite notre modélisation, ainsi que quelques résultats numériques.

#### 4. Modèles SWN associés aux types de systèmes Kanban

Plusieurs types de systèmes de contrôle KCS, GKCS et EKCS peuvent être implémentés selon quatre critères :

- S'il est simple, généralisé ou étendu,
- S'il est à un seul produit ou multiproduit.
- S'il est à un seul étage (single stage) ou multiétages.
- S'il est à kanbans dédiés ou partagés.

Par conséquent, il est possible d'avoir pour chacun des systèmes KCS, GKCS et EKCS, les types suivants :

- a) KCS (ou GKCS, EKCS) à un seul produit (Single Product KCS)
  - a1) KCS à un seul étage dédié.
  - a2) KCS multiétages dédié.
  - a3) KCS à un seul étage à kanbans partagés.
  - a4) KCS multiétages à kanbans partagés.
- b) KCS (ou GKCS, EKCS) multiproduit (Multi-Product KCS)
  - b1) KCS à un seul étage dédié.
  - b2) KCS multiétages dédié.
  - b3) KCS à un seul étage à kanbans partagés.
  - b4) KCS multiétages à kanbans partagés.

Dans la suite, nous nous retréignons uniquement aux modèles de systèmes KCS, GKCS et EKCS dans le cas multiproduit, multiétages et à kanbans dédiés. Les modèles des autres types peuvent être déduits ou construits à partir de nos modèles.

#### 4.1. Modèle SWN associé au système KCS multiétages, multiproduit et à kanbans dédié

Dans cette section, nous modélisons un système de contrôle Kanban multiproduit à deux étages et à kanbans dédiés. Dans chaque étage, peuvent être fabriqués  $n$  types de produits  $P_1, \dots, P_n$ . La fabrication des produits se fait par un processus manufacturier à l'intérieur de l'étage. Un processus manufacturier est généralement composé d'une série de machines (comme des lignes d'assemblage) qui traitent les types de produit. Dans notre cas, chaque processus d'un étage  $i$  est constitué de  $m^i$  lignes d'assemblage  $L_1^i, \dots, L_{m^i}^i$ . Afin de construire le modèle Réseau de Petri stochastique bien formé (SWN) correspondant au système KCS, il est nécessaire d'identifier les entités de base circulant dans le système, en d'autres termes définir les classes de couleur de base. Pour cela, on distingue les classes suivantes :

- La classe des produits  $P = \{ P_1, \dots, P_n \}$ ,
- La classe de lignes  $L_1$  de l'étage 1, et
- La classe de lignes  $L_2$  de l'étage 2.

Le modèle SWN proposé est alors donné ci-après :

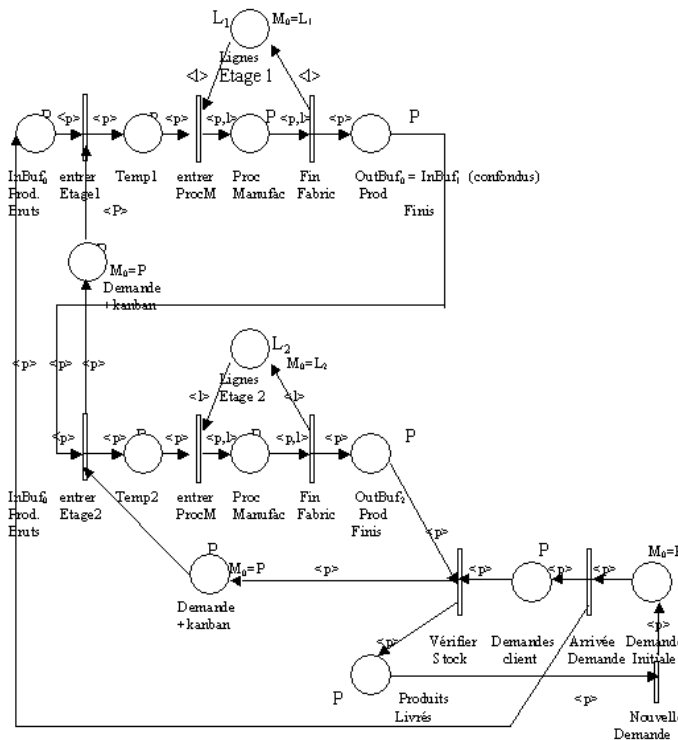
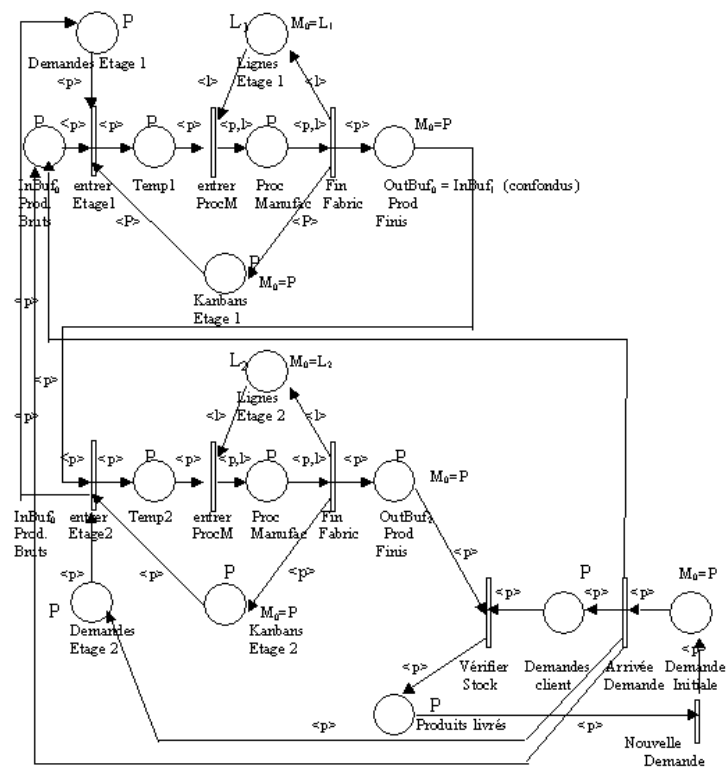


Fig.5 : Modèle SWN du KCS multiproduit à 2 étages

**Remarque :** Les domaines de couleur associés aux places sont donnés sur la figure devant chaque place. Le label des places est omis, mais à chaque place est associé le domaine de couleur correspondant.

#### 4.2. Modèle SWN associé au système GKCS multiétages, multiproduit et à kanbans dédié

Similairement au système KCS, en gardant les mêmes classes de couleur de base,  $P, L_1$  et  $L_2$ , nous modélisons le système GKCS multiproduit à deux étages et à kanbans dédiés par le modèle suivant :



**Fig.6 : Modèle SWN GKCS multiproduit à 2 étages**

#### 4.3. Modèle SWN associé au système EKCS multiétages, multiproduit et à kanbans dédié

De même, en gardant les mêmes classes de couleur de base, P,  $L_1$  et  $L_2$ , nous modélisons le système EKCS multiproduit à deux étages et à kanbans dédiés par le modèle ci-après :

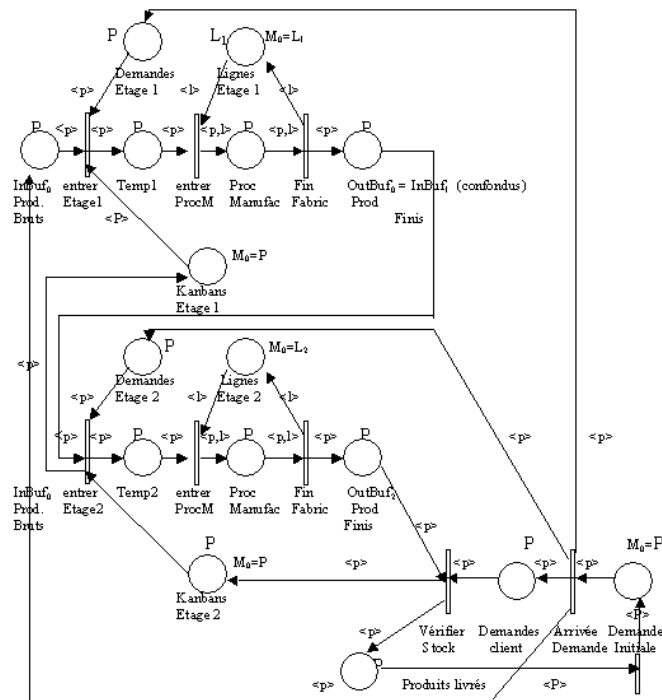


Fig.7 : Modèle SWN EKCS multiproduit à 2 étages

Nous présentons maintenant quelques résultats numériques des 3 types de systèmes Kanban.

## 5. Résultats numériques

L'analyse d'un réseau de Petri se fait généralement à l'aide de son graphe des marquages accessibles. Donc, comment est construit le graphe d'accessibilité d'un réseau de Petri bien formé ?

Comme les réseaux bien formés tirent profit des symétries du système analysé, il est possible de calculer automatiquement un graphe réduit d'accessibilité appelé **graphe symbolique d'accessibilité** [11]. L'idée est de construire des classes d'équivalences de franchissements, définir des classes équivalentes de marquages, puis choisir un représentant pour chaque classe de marquages et de franchissements, qui seul, figure dans le graphe. Le graphe ainsi obtenu est plus réduit et condensé que le graphe ordinaire d'accessibilité.

Ainsi, afin de construire le graphe symbolique d'accessibilité, la procédure suivie est donnée ci-après :

- Définition des classes d'états identiques à une symétrie de couleurs près : elles sont appelées **marquages symboliques**.
- Définition d'une représentation unique de ces marquages symboliques, appelée **représentation canonique**.
- Définition d'une règle de **franchissement symbolique**, fondée sur ces représentations : un franchissement symbolique d'un marquage symbolique vers un autre condense un ensemble de franchissements ordinaires.

Cette méthode d'analyse des SWNs a été implémentée dans l'outil GreatSPN [4].

Pour cela, nous avons utilisé cet outil pour la génération du graphe des marquages d'un modèle SWN, la vérification des propriétés qualitatives, ainsi que pour le calcul des probabilités stationnaires nécessaires au calcul des indices de performance.

### 5.1. Analyse qualitative

Les trois modèles proposés vérifient les propriétés suivantes :

- **Bornitude** : Les places de chacun des modèles sont bornées.

- **Vivacité** : Pour toute transition  $t(c)$ , et de n'importe quel marquage accessible, il est possible de trouver une séquence de franchissement qui rend  $t(c)$  franchissable.
- **Réinitialisable et sans marquages morts** : ce qui implique la non existence d'interblocages durant le fonctionnement des systèmes de contrôle.

## 5.2. Taille des espaces d'état

L'outil GreatSPN permet de générer l'ensemble des marquages symboliques (tangibles et évanescents), tout en donnant le nombre de marquages ordinaires et les instanciations effectuées durant les franchissements. Les résultats obtenus pour les trois modèles sont comme suit :

### Notations

$|P|$  : est la cardinalité de la classe statique des produits P.

$|L_1|$  : est la cardinalité de la classe statique les lignes  $L_1$  de l'étage 1.

$|L_2|$  : est la cardinalité de la classe statique les lignes  $L_2$  de l'étage 2.

NbS : est le nombre de marquages symboliques.

NbO : est le nombre de marquages ordinaires.

Modèle KCS						Modèle GKCS					
$ P $	$ L_1 $	$ L_2 $	NbS	NbO	NbO/NbS	$ P $	$ L_1 $	$ L_2 $	NbS	NbO	NbO/NbS
3	5	7	285	6199	21.75	3	5	7	146110	18938622	129.62
10	5	7	285	743880	2610.105	10	5	7	146110	2272634640	15554.27
50	5	7	285	1033	9.15	50	5	7	146110	3156437	21.603
10	10	9	285	156214800	548122.10	10	10	9	146110	1909013097600	13065588.24
50	10	10	285	433930	1522.56						
50	20	20	285	78685973	276091.13						

Table.1 : Taille de l'espace d'états des modèles KCS et GKCS

Modèle EKCS					
$ P $	$ L_1 $	$ L_2 $	NbS	NbO	NbPO/NbS
3	5	7	285	6199	21.75
10	5	7	285	743880	2610.105
50	5	7	285	1033	3.62
10	10	9	285	156214800	548122.105
50	10	10	285	433930	1522.56
50	20	20	285	78685973	276091.13

Table.2 : Taille de l'espace d'états du modèle EKCS

A partir de ces tableaux, nous remarquons que, grâce au modèle SWN qui profite des symétries intrinsèques aux systèmes Kanban, le nombre de marquages symboliques est très réduit par rapport au nombre de marquages ordinaires, ce qui diminue de la complexité d'analyse.

De plus, en comparant entre les différents modèles, on voit que le modèle GKCS génère plus un graphe d'états conséquent par rapport aux deux autres modèles.

## 5.3. Indices de performances

Afin d'évaluer les différents types de systèmes Kanban, nous nous intéressons aux paramètres suivants :

- Le nombre de produits fabriqués par unité de temps, noté **Prod** : Ceci correspond au débit de la transition « Vérifier Stock » qui livre les produits aux clients demandeurs (noté **ProdG**). On peut également calculer le nombre de produits fabriqués par unité de temps pour chaque étage (notés respectivement **Prod<sub>1</sub>** et **Prod<sub>2</sub>** pour l'étage 1 et l'étage 2), ce qui correspond aux débits des transitions « Fin Fabrication » de chaque étage.

- Le taux de travail en cours **WIP** : ceci correspond aux taux de lancement des commandes de fabrication des produits au sein de chaque étage, c'est-à-dire au débit des transitions « Entrer Process. Manufacturier » de chaque étage. Nous notons ces taux respectivement **Wip<sub>1</sub>** et **Wip<sub>2</sub>** pour l'étage 1 et l'étage 2.

Les indices obtenus sont alors donnés comme suit :

**Modèle KCS**

P	L <sub>1</sub>	L <sub>2</sub>	Prod	Prod <sub>1</sub>	Prod <sub>2</sub>	Wip <sub>1</sub>	Wip <sub>2</sub>
3	5	7	0.407	0.407	0.407	0.407	0.407
10	5	7	0.407	0.407	0.407	0.407	0.407
50	5	7	0.407	0.407	0.407	0.407	0.407
10	10	9	0.407	0.407	0.407	0.407	0.407
50	10	10	0.407	0.407	0.407	0.407	0.407
50	20	20	0.407	0.407	0.407	0.407	0.407

**Modèle GKCS**

P	L <sub>1</sub>	L <sub>2</sub>	Prod	Prod <sub>1</sub>	Prod <sub>2</sub>	Wip <sub>1</sub>	Wip <sub>2</sub>
3	5	7	0.752	0.752	0.752	0.752	0.752
10	5	7	0.752	0.752	0.752	0.752	0.752
50	5	7	0.752	0.752	0.752	0.752	0.752
10	10	9	0.752	0.752	0.752	0.752	0.752

**Table.3 : Indices de performance des modèles KCS et GKCS**

**Modèle EKCS**

P	L <sub>1</sub>	L <sub>2</sub>	Prod	Prod <sub>1</sub>	Prod <sub>2</sub>	Wip <sub>1</sub>	Wip <sub>2</sub>
3	5	7	0.407	0.407	0.407	0.407	0.407
10	5	7	0.407	0.407	0.407	0.407	0.407
50	5	7	0.407	0.407	0.407	0.407	0.407
10	10	9	0.407	0.407	0.407	0.407	0.407
50	10	10	0.407	0.407	0.407	0.407	0.407
50	20	20	0.407	0.407	0.407	0.407	0.407

**Table.4 : Indices de performance du modèle EKCS**

A travers ces tableaux, nous pouvons conclure que les systèmes KCS et EKCS se rapprochent étroitement puisqu'ils présentent des valeurs de taux de production identiques.

A l'encontre, le système GKCS a un taux de production élevé par rapport aux deux autres systèmes, ce qui s'éloigne quelque peu de l'objectif fixé par les systèmes Kanban, et qui consiste à garder minimal le taux de production en cours.

## 6. Conclusion

Dans ce travail, nous nous sommes intéressés à modéliser les systèmes de contrôle industriels de type Kanban. Nous avons utilisé à cet effet le modèle réseau de Petri bien formé SWN qui a montré son efficacité quant à la réduction du nombre d'états à analyser, et ainsi au compactage des graphes des marquages associés aux modèles proposés.

D'après les résultats obtenus, nous pouvons conclure que le modèle GKCS présente un taux de production supérieur aux autres systèmes. Notons également que ce type de système est plus complexe à analyser, et génère un espace d'états considérable, pouvant ainsi mener au phénomène d'explosion combinatoire.

Enfin, nous envisageons dans le futur de réduire encore la complexité des calculs des paramètres de performance en appliquant les méthodes de composition synchrone et asynchrone de SWN proposées par [18], [19].

## Bibliographie

- [1] [1] B.Baynat, J.A. Buzacott and Y. Dallery. Multi-product Kanban-like control systems. International Journal of Production Research. No 16. pp 4225-4255. November 2002.
- [2] [2] B.Baynat, Y.Dallery, M.Di Mascolo, Y.Frein, "A multi-class approximation technique for the analysis of Kanban-like control systems", International Journal of Production Research, Special Issue on "Modelling Specification and Analysis of Manufacturing Systems", Janvier 2001, Vol. 39, N°2, 307-328.
- [3] [3] J.A.Buzacott. Queuing models of kanban and mpr controlled production systems. Engineering Cost and Production Economics 17 3-20. 1989.
- [4] [4] G.Chiola, G.Franceschinis, R.Gaeta, M.Ribaudo. GreatSPN 1.7 : Graphical Editor and analyser for Timed and Stochastic Petri Nets. Performance Evaluation, 24(1, 2):47-68, 1995.
- [5]

- [6] [5] F. Cho Y. Sugimori, K. Kusunoki and S. Uchikawa. Toyota production system and kanban system materialization of just-in-time and respect-for-human system. *International Journal of Production Research*, (15) :553\_564, 1977.
- [7] [6] Y.Dallery and G.Liberopoulos. A new kanban-type pull control mechanism for multistage manufacturing systems. *IIE Transactions on Design and Manufacturing* 32 369-386. 2000.
- [8] [7] C.Delamare. Etude de grands systèmes stochastiques symétriques par réseaux décomposables. Thèse, Université de Reims Champagne Ardenne. Octobre 2003.
- [9] [8] C.Delamare, Y.Gardan, P.Moreaux. Performance evaluation of manufacturing systems with stochastic Well Formed Nets :a case study. IDPT-June 2002.
- [10] [9] M.Di Mascolo, Y.Frein, B.Baynat and Y.Dallery, "Queuing network modelling and analysis of generalized kanban systems.", *European Control Conference (ECC'93)*, Groningen (The Netherlands) , 28 June -1 July 1993.
- [11] [10] M.Di Mascolo, Y.Frein and Y.Dallery, "An analytical method for performance evaluation of Kanban controlled production systems", *Operations Research, Special Issue on "New Directions for Operations Management Research"*, Vol. 44, N°1, pp. 50-64, January-February 1996.
- [12] [11] C.Dutheillet. Symétries dans les réseaux colorés. Définition, analyse et application à l'évaluation de performance. Thèse, Université Paris VI, Paris, France, 28 janvier 1991.
- [13] [12] K.Jensen. Coloured Petri Nets and the invariant method. *Theoretical Computer Science*, 14 : 317-336. 1981.
- [14] [13] D.Mitra and I.Mitrani, "Analysis of a novel discipline for cell coordination in production lines: Part I", *Management Science* 36, pp. 1548-1566, 1990.
- [15] [14] D.Mitra and I.Mitrani, "Analysis of a novel discipline for cell coordination in production lines: Part II – Stochastic demands", *Operations Research* 39, pp. 807-823, 1991.
- [16] [15] K.E.Moore, S.M.Gupta. Petri net models of flexible and automated manufacturing systems: a survey. *Int. J. Prod. Res.* 1996. Vol 34, N°11, 3001-3035.
- [17] [16] K.E.Moore, S.M.Gupta. Petri net-based analysis and simulation of traditional and flexible kanban control policies. In *Proc. Of the Japan-USA Symposium on Flexible Automation*, 1257-1262. 1996.
- [18] [17] K.E.Moore, S.M.Gupta. Stochastic coloured Petri net (SCPN) models of traditional and flexible kanban systems. *Int. J. Prod. Res.* 1999. Vol 37, N°9, 2135-2158.
- [19] [18] P. Moreaux. Agrégation et décomposition combinées pour l'évaluation de performances des systèmes parallèles complexes. In *RenPar'8 : Rencontres Francophones sur le parallélisme*, Bordeaux, France, 20-24 mai 1996. LaBRI, France.
- [20] [19] P. Moreaux. Structuration des chaînes de Markov des réseaux de Petri stochastiques. Décomposition tensorielle et agrégation. Thèse, Université Paris Dauphine, Paris, France, 11 décembre 1996.
- [21] [20] P.Zipkin. A kanban-like production control system : Analysis of simple models. Technical report, Research Working Paper No.89-1, Graduate School of Business, Columbia University, New York. 1989.