

Rapport de Recherche



Méthode conjointe de décomposition et de calcul des bornes pour l'évaluation des performances d'un réseau de Petri Stochastique non borné

Nabila SALMI, Malika IOUALALEN,

LSI-TR-1902

Novembre 2002

Méthode conjointe de décomposition et de calcul des bornes pour l'évaluation des performances d'un réseau de Petri Stochastique non borné

Nabila SALMI¹, Malika IOUALALEN²

LSI-Département Informatique, Faculté Génie Electronique & Informatique, USTHB
El Alia BP n°32, Bab Ezzouar, Alger, Algérie.
E-mail : ¹ sn_2005@hotmail.com
² Boukala@wissal.dz

RESUME: Nous étudions dans cet article une nouvelle technique d'analyse des réseaux de Petri stochastiques ayant n places non bornées, permettant de remédier au problème d'explosion combinatoire des états. Nous définissons à cet effet une méthode de décomposition basée sur l'ordonnement des transitions, et nous l'utilisons afin d'obtenir des sous-réseaux de Petri stochastiques plus faciles à résoudre. Ces sous-réseaux peuvent être analysés soit à l'aide de l'approche matricielle géométrique, ou bien à l'aide d'une méthode dite d'approximation stochastique. Puis, nous utilisons l'algèbre tensorielle pour regrouper les solutions stationnaires calculées des sous-réseaux, pour former la solution du réseau global.

MOTS-CLES. RDPS - Explosion combinatoire - Décomposition - Ordonnement global - Approche matricielle géométrique - Méthode d'approximation

1. Introduction

Durant les dernières décennies, les réseaux de Petri stochastiques (RDPS) ont été très utilisés dans le domaine de l'évaluation des systèmes parallèles et complexes, notamment les systèmes de production, les systèmes d'exploitation et les réseaux de télécommunication. En effet, ce type de réseau de Petri est très approprié à la représentation de tels systèmes réels, et permet, grâce à sa caractéristique probabiliste, d'effectuer une évaluation quantitative des paramètres de performance du système modélisé.

Toutefois, lorsque le RDPS à analyser est non borné, on s'aperçoit que la taille du graphe des marquages associé augmente très rapidement, donnant ainsi lieu à une infinité d'états, phénomène connu sous le nom d'explosion combinatoire.

Plusieurs travaux, faisant l'étude de ce phénomène, ont été proposés. Nous pouvons les classer en trois classes :

1. Méthodes de transformation des RDPS, de décomposition et d'agrégation des états du RDPS [DUT89], [DUT92], [HEN89].
2. Méthodes de calcul de solutions en forme produit, s'inspirant des techniques d'analyse des files d'attente [DON91] [FLO88], [FLO89].
3. Méthodes de calcul des bornes consistant à rechercher des solutions approchées [TRU95], [ZUB89].

Parmi cette littérature, d'importants travaux ont été proposés pour l'étude du cas non borné. Florin et Natkin ont été les premiers à étudier un RDPS à une seule place non bornée [FLO86], en se basant sur des modèles exhibant une structure régulière. Puis, dans [FLO87], le critère d'ergodicité a été étudié pour des RDPS ayant plus d'une place non bornée, et des taux de franchissement constants. Néanmoins, lorsque l'espace dit "des marquages" a une dimension supérieure à 1, il n'est plus possible d'étudier ce modèle, en raison de l'infinité des états.

D'autres auteurs, Granda et al. [GRA92] ont aussi présenté une étude de RDPS généralisés à plusieurs places non bornées, en s'appuyant sur l'existence de symétries naturelles dans le système modélisé. A travers tous ces travaux, l'idée principale est d'étudier des systèmes exhibant une structure régulière répétitive. Cette structure permet de définir l'espace des états comme un processus stochastique ayant une structure de quasi-naissance et de mort, et de calculer ainsi la solution stationnaire d'une manière efficace.

Récemment, Haverkort [HAV95] a introduit une nouvelle approche traitant les RDPS à une place non bornée, permettant le calcul d'une solution matricielle géométrique, et ce, en supposant de même l'existence d'une structure de quasi-naissance et de mort.

Nous nous intéressons dans nos travaux aux méthodes d'analyse des RDPS à n places non bornées quelconques. Notre approche consiste à utiliser une nouvelle méthode de décomposition des RDPS en plusieurs sous-réseaux, introduite dans ce papier, puis de combiner une deuxième méthode de calcul des bornes dite d'approximation stochastique [SAL2002] avec un travail déjà soumis, notamment [HAV95].

Ce papier sera organisé comme suit : nous rappelons d'abord les concepts préliminaires des RDPS. Puis, nous définissons un nouveau formalisme de décomposition d'un RDPS. Nous rappelons après, la méthode matricielle de résolution d'un RDPS à une place non bornée [HAV95]. Enfin, nous présentons l'algorithme général de la méthode conjointe développée.

2. Concepts Préliminaires

2.1. Réseau de Petri stochastique (RDPS)

Un RDPS est un Réseau de Petri temporisé doté d'une mesure de probabilité sur l'espace des trajectoires ; en d'autres termes, les séquences de franchissement sont mesurables en considérant un espace aléatoire.

Plus formellement, un RDPS est un quintuplet $\langle P, T, Pre, Post, W \rangle$, où :

- P, T : désignent resp. les ensembles finis de places et de transitions ($P \neq \emptyset, T \neq \emptyset$).
- $Pre, Post$: $P \times T \rightarrow \mathbb{N}$ sont respectivement les applications d'incidence arrière et avant.
- $W = \{\lambda_i \in \mathbb{R} / \lambda_i \text{ est le taux de franchissement constant de la transition } t_i\}$.

Le modèle de RDPS étudié dans ce papier est le RDPS markovien qui associe à chaque transition une variable aléatoire de loi exponentielle représentant la durée de franchissement. Les taux de franchissement des transitions sont alors liés à l'approche markovienne sous-jacente.

L'intérêt des RDPS markoviens réside dans la possibilité d'effectuer un calcul numérique des paramètres de performance du système modélisé.

2.2 Marquage et transitions

L'évolution d'un RDPS est donnée par la notion de marquages.

Un marquage $M: P \rightarrow \mathbb{N}$ d'un RDP est une fonction décrivant un état observable du RDP. A chaque place est associé le nombre de jetons qu'elle contient.

Un marquage M est accessible depuis le marquage initial M_0 ssi il existe une séquence de franchissements $S = t_1, \dots, t_n$ telle que $M_0[S] M$.

L'ensemble des marquages accessibles depuis M_0 (noté $\overrightarrow{M_0}$) définit le graphe des marquages accessibles.

Règle de franchissement :

Une transition t est franchissable à un instant i dans le marquage M ssi :

1. $\forall p \in P, M(p) \geq Pre(p, t)$
2. La durée de franchissement d_i à l'instant i est la plus petite des durées de franchissement de l'ensemble des transitions franchissables.

Le marquage M' obtenu après franchissement de t est calculé de la même manière que pour un RDP ordinaire :

$$\forall p \in P, M'(p) = M(p) + Post(p, t) - Pre(p, t).$$

La suite des couples $\{(M_0, d_0), \dots, (M_n, d_n), \dots\}$ est appelée une trajectoire du RDPS.

Processus de marquages :

Pour une trajectoire $W = \{(M_0, d_0), \dots, (M_n, d_n), \dots\}$, le marquage atteint à l'instant d est défini par :

$$M(d,w) = \begin{bmatrix} M(p_1, d, W) \\ \dots \\ M(p_m, d, W) \end{bmatrix} = X_n(W)$$

$$\forall d \in [d_n, d_{n+1}], m = \text{card}(P).$$

L'ensemble des marquages à l'instant d , $M(d,w)$, pour W parcourant l'ensemble des trajectoires possibles, est un vecteur aléatoire (p,1) noté $M(d)$. Le vecteur est composé des variables aléatoires $M(p_i, d)$ représentant la marque de p_i à l'instant d .

La suite des vecteurs aléatoires $M(d)$ constitue un processus aléatoire dit processus de marquage.

Notations :

L'ensemble des places d'entrée (resp. de sortie) d'une transition est :

$${}^{\cdot}t = \{ p \in P / \text{Pre}(p,t) > 0 \},$$

$$\text{resp. } t^{\cdot} = \{ p \in P / \text{Post}(p,t) > 0 \}$$

Dans un RDPS, nous définissons :

1. Transitions séquentielles : t_1 et t_2 sont dites séquentielles si : ${}^{\cdot}t_1 \cap {}^{\cdot}t_2 \neq \emptyset$.
2. Transitions conflictuelles : t_1 et t_2 sont dites conflictuelles si : $t_1^{\cdot} \cap t_2^{\cdot} \neq \emptyset$.
3. Transitions parallèles : t_1 et t_2 sont dites parallèles si elles ne sont ni séquentielles, ni conflictuelles.

3. Principe Général

Soit S un RDPS à n places non bornées. Analyser le RDPS S en évitant le problème de l'explosion combinatoire, revient à :

1. Décomposer S en l sous-réseaux SR_1, SR_2, \dots, SR_l tels que chaque SR_i a au plus une place non bornée.

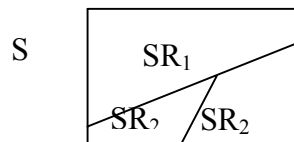


Figure 1. Décomposition de RDPS

2. Analyser chaque sous-réseau SR_i d'une manière isolée : on vérifie d'abord si le sous-réseau présente une structure de processus de naissance et de mort, et ce en vérifiant certaines hypothèses.

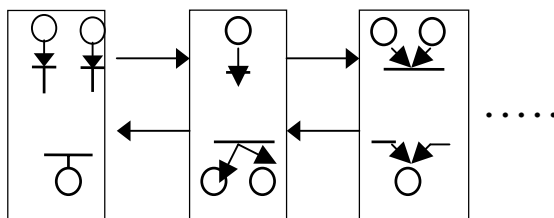


Figure 2. Processus de naissance et de mort

Si tel est le cas, on applique à SR_i la méthode d'analyse matricielle géométrique proposée par [HAV95] pour un RDPS à une seule place non bornée.

Dans le cas contraire, on applique à SR_i la méthode d'approximation stochastique, qui construit deux processus stochastiques $SR_{i,inf}$ et $SR_{i,sup}$ ayant une structure de naissance et de mort, et approximant le sous-réseau, puis étudie ces processus.

3. Après l'analyse des sous-réseaux, on obtient les probabilités stationnaires π_{SRi} des SRi ou les $\pi_{SRi_{inf}}$ et $\pi_{SRi_{sup}}$ des SRi_{inf} et SRi_{sup} , puis on utilise le produit tensoriel \otimes entre ces probabilités (voir [DAV81] pour les définitions de l'algèbre tensorielle), afin de calculer ou d'encadrer la probabilité stationnaire globale.

4. Formalisme de décomposition

Le formalisme de décomposition développé est construit sur la base d'un ordonnancement global des transitions. Un RDPS peut être décomposé si son ordonnancement global est isomorphe à l'ordonnancement global du RDP dont l'espace d'états est égal au produit cartésien des espaces d'états des sous-réseaux. Nous définissons ci-après les concepts nécessaires à cette étude.

4.1. Ordonnancement global des transitions d'un RDP

L'ordonnancement global d'un RDP (noté OG) consiste en l'ordre de tir des transitions. Cet ordre de tir doit tenir compte de la nature des transitions (séquentielles, conflictuelles ou parallèles).

Définition 1 : Ordonnancement global

L'ordonnancement global d'un RDP $R = \langle P, T, Pre, Post, M \rangle$ est donné par le triplet $OG = \langle T, P, <_G \rangle$ tel que :

$<_G \subseteq T \times T$ est un ordre défini par : $\forall t_1, t_2 \in T, t_1 <_G t_2 \Leftrightarrow t_1$ est tirée avant t_2 .

Remarques :

1. Lorsque deux transitions t_1 et t_2 sont parallèles (concurrentes), l'ordre défini entre eux peut être soit $t_1 <_G t_2$ ou bien $t_2 <_G t_1$.

2. L'ordonnancement global d'un RDP représente une image de son évolution. Donc, afin d'affirmer l'équivalence entre deux RDP (donnée par l'équivalence de comportement ou d'évolution), on vérifiera l'isomorphisme des ordonnancements globaux associés.

Définition 2 : Ordonnements isomorphes

Soient deux ordonnancements globaux OG_1 et OG_2 , tels que :

$OG_1 = \langle T_1, P_1, <_{G_1} \rangle, OG_2 = \langle T_2, P_2, <_{G_2} \rangle$.

OG_1 et OG_2 , sont dits isomorphes si et seulement si :

$T_1 = T_2, P_1 = P_2$ et $<_{G_1} = <_{G_2}$ (à une transition parallèle près).

Théorème 1 :

Soient $R_1 = \langle P_1, T_1, Pre_1, Post_1, M_1 \rangle, R_2 = \langle P_2, T_2, Pre_2, Post_2, M_2 \rangle$ deux RDPs munis respectivement des ordonnancements globaux OG_1 et OG_2 .

Alors, OG_1 et OG_2 sont isomorphes $\Leftrightarrow R_1$ et R_2 sont isomorphes.

Remarque :

Ces définitions sont similaires dans le cas d'un RDP stochastique.

4.2. Calcul de l'ordonnancement global

Un ordonnancement global d'un RDP se base sur la détection des transitions séquentielles, conflictuelles et parallèles. Il peut être construit à l'aide de l'algorithme suivant :

Algorithme COG

Début

Soit R un RDPS.

1. Ordonner les transitions séquentielles selon leur séquentialité.

L'ordre résultat est noté $<_s$.

2. Pour chaque couple de transitions conflictuelles (t_i, t_j) , insérer dans l'ordre $<_s$ soit la séquence $t_i t_j$ ou $t_j t_i$ de telle manière à ce que l'ordre $<_s$ soit préservé. L'ordre résultant est noté $<_{sc}$.

3. Pour chaque couple de transitions parallèles (t_i, t_j) , insérer dans l'ordre $<_{sc}$ soit la séquence $t_i t_j$ ou $t_j t_i$ de telle manière à ce que l'ordre $<_{sc}$ soit préservé.

Nous obtenons alors l'ordonnancement global OG.

Fin

Exemple 1 :

Soit le RDP de la figure 3 suivante :

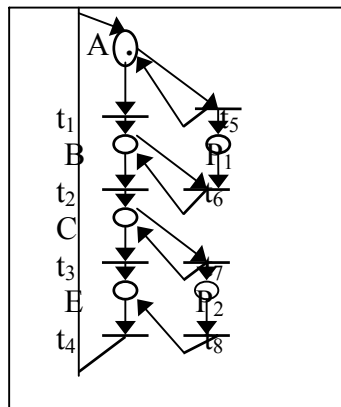


Figure 3. Réseau de Petri

A partir de la figure précédente, nous avons:

1. Transitions séquentielles = $\{(t_1, t_2), (t_1, t_6), (t_2, t_3), (t_2, t_7), (t_3, t_4), (t_4, t_1), (t_5, t_6), (t_7, t_8)\}$.

$\Rightarrow <_s: t_1 < t_2 < t_3 < t_4 < t_1, t_1 < t_6, t_2 < t_7, t_5 < t_6, t_7 < t_8$

2. Transitions conflictuelles = $\{(t_1, t_5), (t_3, t_7), (t_2, t_6), (t_4, t_8)\}$.

$\Rightarrow <_{sc}: t_1 < \{t_2, t_5\} < \{t_3, t_6\} < \{t_4, t_7\} < t_8$.

3. Transitions parallèles = \emptyset .

\Rightarrow l'ordonnancement global OG est

$<_{sc}: t_1 < \{t_2, t_5\} < \{t_3, t_6\} < \{t_4, t_7\} < t_8$.

4.3. Indépendance des RDPS

Pour pouvoir calculer la solution stationnaire d'un RDPS en fonction des solutions correspondant aux sous-réseaux, il est nécessaire de construire des sous-réseaux indépendants.

Nous introduisons donc la notion d'indépendance des sous-réseaux, équivalente à l'indépendance probabiliste entre deux processus stochastiques :

Définition 4 : Indépendance d'un RDP d'un autre

Un RDP R_1 est dit **indépendant** d'un autre RDP R_2 , si :

1. Le tir d'une transition quelconque de R_2 ne produit, ni ne supprime des marquages de R_1 .
2. Le tir d'une transition quelconque de R_1 n'est pas conditionné par l'existence de marques dans les places de R_2 .

Plus formellement,

Soient $R_1 = \langle P_1, T_1, Pre_1, Post_1, M_1 \rangle, R_2 = \langle P_2, T_2, Pre_2, Post_2, M_2 \rangle$ deux RDP. On note M_i l'ensemble des marquages de R_i . R_1 est **indépendant** de R_2 si et seulement si :

1. $\forall t \in T_1, t \not\subset P_2 \rightarrow$
2. $\forall t \in T_2$ franchissable, M_1 reste inchangé lorsque t est tirée.

Exemple 3 : Indépendance de RDP

Soient R_1 et R_2 les deux RDP suivants :

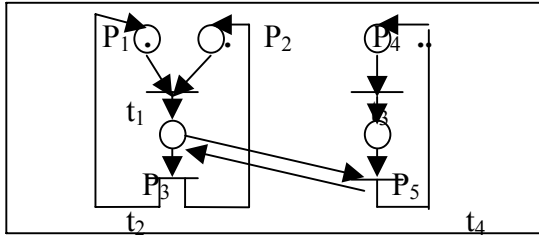


Figure 4. Réseaux de Petri dépendants

Lorsque R_1 et R_2 sont dépliés séparément (càd en faisant abstraction des arcs existants entre P_3 et t_4), on obtient les deux graphes de marquages G_{R_1} et G_{R_2} suivants :

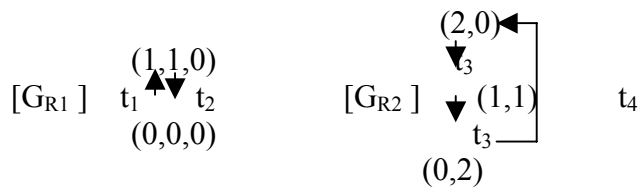


Figure 5. Graphes des marquages associés

Par contre, si l'on prend en considération les arcs entre P_3 et t_4 , le passage dans le graphe G_{R_2} de $(1,1) \rightarrow (0,2)$ ne peut être effectué que si P_3 contient une marque. D'où, le tir de la transition t_4 de R_2 est conditionné par le marquage de la place P_3 de R_1 . R_2 **dépend** donc de R_1 .

Quant à R_1 , on remarque que le tir des transitions de R_2 n'affecte pas l'évolution de R_1 , et le tir des transitions de R_1 n'est pas conditionné par les places de R_2 . Donc, R_1 est **indépendant** de R_2 , alors que R_2 ne l'est pas de R_1 .

Remarque :

Si R_1 est indépendant de R_2 , ceci n'implique pas que R_2 l'est de R_1 .

Définition 5 : Indépendance de RDP

Deux RDP R_1 et R_2 sont **indépendants** (noté $R_1 \perp R_2$) si et seulement si : R_1 est indépendant de R_2 et R_2 est indépendant de R_1 .

4.4. Algorithme de décomposition

La décomposition d'un RDPS se base essentiellement sur la vérification de 6 règles :

Définition 6 : Décomposition (R)

Soit R un RDPS, et soit OG son ordonnancement global. Il est possible de définir m sous-réseaux SR_i tels que :

$SR_i = \langle P_i, T_i, I_i, O_i, M_i, W_i \rangle$ où :

P_i : ensemble de places de SR_i .

T_i : ensemble de transitions de SR_i .

I_i : ensemble de places initiales de SR_i .

O_i : ensemble de places de sortie de SR_i .

M_i : Marquage initial de SR_i .

W_i : ensemble de taux de transition de SR_i .

Les sous-réseaux doivent vérifier les règles suivantes :

Règle 1 : Les sous-réseaux SR_i sont reliés par des transitions **séquentielles** : $\forall SR_i$ relié à SR_j , on a : $\forall p \in O_i / \exists p' \in I_j: p' = \cdot p'$

Règle 2 : Le RDPS dont l'espace d'états est égal au produit cartésien des espaces d'états des sous-réseaux doit avoir un ordonnancement global OG_{SR} tel que OG_{SR} est **isomorphe** à OG .

Règle 3 : Rajouter à chaque sous-réseau SR_i un arc reliant la ou les transitions le reliant au sous-réseau adjacent avec les places initiales de SR_i et pour chaque place d'entrée de SR_i affecter un jeton.

Règle 4 : Chaque sous-réseau SR_i contient **au plus une** place non bornée.

Règle 5 : Les sous-réseaux SR_i sont **indépendants**.

Pour décomposer un RDPS, on se base en premier sur la 1ere règle, et on détecte les sous-réseaux possibles délimités par des transitions séquentielles. Puis, les sous-réseaux sont modifiés au fur et à mesure de la vérification des autres règles.

Preuve :

L'algorithme vise à décomposer un RDPS en plusieurs sous-réseaux indépendants ayant au plus une place non bornée. La décomposition est effectuée de telle manière à garantir l'équivalence du RDPS d'origine avec la somme des sous-réseaux. En effet :

1. La règle 1 donne la manière de décomposer en spécifiant que les sous-réseaux doivent être délimités par des transitions séquentielles. Cette règle assure que la synchronisation des activités n'est pas affectée par la décomposition, et donc qu'aucune information concernant l'interaction des éléments du système modélisé ne soit perdue.

2. La règle 2 garantit que le RDPS original est équivalent en comportement avec la somme des sous-réseaux, en vérifiant la propriété d'isomorphisme entre l'ordonnancement global du réseau original, et celui de la somme des sous-réseaux. En effet, l'ordonnancement global représente les possibilités d'évolution du RDPS. Donc, si cet ordonnancement est préservé par la somme des sous-réseaux, la somme aura les mêmes possibilités d'évolution que celles du RDPS d'origine, et donc le même comportement.

3. La règle 3 préserve la propriété de vivacité et la propriété de l'état d'accueil du RDPS original, en rajoutant pour chaque sous-réseau des arcs reliant ses transitions de sortie, à ses places d'entrée.

4. La règle 4 stipule que chaque sous-réseau doit contenir au plus une place non bornée, pour pouvoir analyser les sous-réseaux.

5. La règle 5 exige l'indépendance des sous-réseaux, par souci de garantir que lors de la décomposition, aucune information n'est perdue due à l'interaction entre les sous-réseaux.

En appliquant cet algorithme à un RDPS, nous obtenons des sous-modèles indépendants que nous analysons soit avec la méthode matricielle géométrique [HAV95], ou bien à l'aide de la technique d'approximation stochastique [SAL2002].

L'analyse d'un sous-réseau dépendra en fait de sa structure. S'il présente une structure répétitive de processus de naissance et de mort (vérifier les hypothèses de [HAV95]), ce sous-réseau sera analysée par la méthode géométrique de [HAV95]. Sinon, nous utiliserons la technique d'approximation stochastique [SAL2002].

5. Calcul de la solution stationnaire globale

Le calcul de la solution stationnaire du RDPS d'origine dépend de l'analyse des sous-réseaux. Deux cas se présentent :

1er cas :

Si $\forall SR_i$, SR_i présente une structure de naissance et de mort, les probabilités stationnaires π_{SR_i} sont calculées à l'aide de la méthode matricielle géométrique. Dans ce cas :

$\pi_{Globale} = \otimes_{i=1} \pi_{SR_i}$ où \otimes désigne le produit tensoriel

2ème cas :

Si $\exists SR_i$ tel que SR_i ne présente pas une structure de naissance et de mort, donc deux sous-ensembles de sous-réseaux E_1 et E_2 existent :

1. $E_1 = \{ \text{ensemble des } SR_i / SR_i \rightarrow \text{structure de quasi-naissance et de mort} \}$

Dans ce cas, $\forall SR_i \in E_1$, SR_i sera approximé par deux processus de naissance/mort, puis la probabilité stationnaire π_{SR_i} sera encadrée entre deux bornes que l'on notera $\pi_{SR_i}^{inf}$ et $\pi_{SR_i}^{sup}$.

2. $E_2 = \{ \text{ensemble des } SR_i / SR_i \notin E_1 \}$

Donc, à chaque SR_i correspond une probabilité stationnaire π_{SR_i} calculée à l'aide de la méthode matricielle géométrique.

Dans ce deuxième cas, on aura :

$$\otimes \left[\otimes_{SR_i \in E_1} \pi_{SR_i}^{inf}, \otimes_{SR_i \in E_2} \pi_{SR_i} \right] \leq \pi_{Globale} \leq \otimes \left[\otimes_{SR_i \in E_1} \pi_{SR_i}^{sup}, \otimes_{SR_i \in E_2} \pi_{SR_i} \right]$$

Après le calcul de la solution stationnaire, les indices de performance peuvent être calculés d'une manière soit exacte (1er cas) ou approximative (2ème cas).

Nous présentons maintenant l'algorithme général de la méthode conjointe d'analyse des RDPS non bornés.

7. Algorithme général

Début

Soit S le RDPS à analyser .

1. Construire l'ordonnancement global de S, en appliquant l'algorithme COG.

2. Décomposer S en l sous-réseaux SR (utiliser l'algorithme Décomposition(R)).

3. Vérifier si chaque sous-réseau SR_i admet les hypothèses définies dans la méthode matricielle géométrique[HAV95].

4. Si oui

Alors Appliquer la méthode matricielle géométrique de [HAV95] à chaque SR_i et calculer π_i sa probabilité stationnaire.

$$\pi_{Globale} = \otimes_{i=1}^l \pi_i$$

Sinon soit p le nombre de sous-réseaux ne répondant pas aux hypothèses déjà citées.

Pour i = 1 à p

Appliquer l'algorithme Approxime(SR_i)

Soient π_i^{inf} et π_i^{sup} les bornes calculées pour les probabilités stationnaires de SR_i

Fin pour

Pour i = 1 à l-p

Appliquer la méthode matricielle géométrique au reste des sous-réseaux SR_i et calculer π_i , la probabilité stationnaire de chacun d'eux.

Fin pour

$$\otimes \left(\otimes_{i=1}^p \pi_i^{inf}, \otimes_{i=1}^{l-p} \pi_i \right) \leq \pi_{Globale} \leq \otimes \left(\otimes_{i=1}^p \pi_i^{sup}, \otimes_{i=1}^{l-p} \pi_i \right)$$

Fsi
Fin

8. Exemple applicatif

Soit la figure 3 de l'exemple 1. Le RDPS représenté modélise deux processus Producteur/Consommateur qui opèrent comme suit :

Le 1er (resp. second) producteur produit une unité de production en franchissant la transition t_5 (resp. t_7).

Puis, le consommateur associé consomme le produit généré en franchissant t_6 (resp. t_8 pour le 2eme consommateur).

Les places P_1 et P_2 sont non bornées.

8.1. Décomposition de R

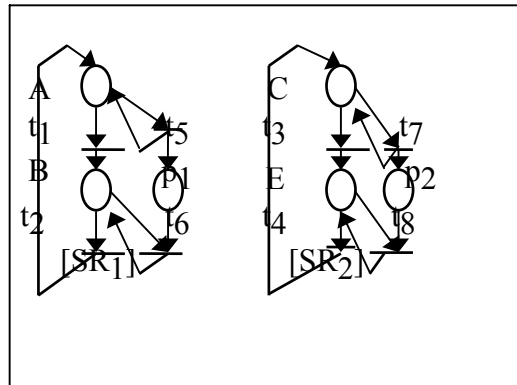


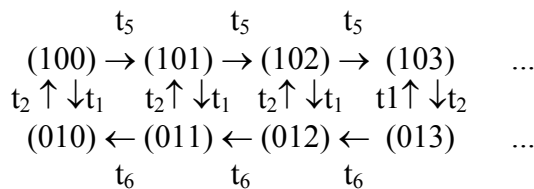
Figure 6. Décomposition du RDPS

Pour décomposer le RDPS R, on voit que, parmi les transitions séquentielles (donnée dans l'exemple 1), qui délimitent des sous-réseaux à une place non bornée, les transitions (t_2, t_3) séparent 2 sous-réseaux stochastiques SR_1 et SR_2 , qui vérifient les 5 règles de la définition 6:

8.2. Analyse des sous-réseaux stochastiques

8.2.1. Analyse de SR_1

Construisons d'abord la chaîne de Markov sous-jacente à SR_1 :



La chaîne de Markov obtenue présente une structure répétitive à partir du niveau 1. Cette structure vérifie les hypothèses de [HÄV95]. Nous avons alors la possibilité d'analyser SR_1 selon la méthode génératrice matricielle.

La matrice génératrice de SR_1 a la forme suivante :

$$Q = \begin{array}{cccc|cccc}
 \dots & -(\lambda_1 + \lambda_5) & \dots & \lambda_1 & \lambda_5 & \dots & 0 & \dots \\
 \lambda_2 & -\lambda_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\
 0 & 0 & -(\lambda_1 + \lambda_6) & \lambda_1 & \lambda_6 & 0 & 0 & \dots \\
 \dots & 0 & 0 & -(\lambda_1 + \lambda_5) & \lambda_1 & \lambda_5 & 0 & \dots \\
 0 & \lambda_6 & \lambda_2 & -(\lambda_2 + \lambda_6) & 0 & 0 & 0 & \dots \\
 \dots & 0 & 0 & -(\lambda_1 + \lambda_5) & \lambda_1 & \lambda_5 & 0 & \dots \\
 & 0 & \lambda_6 & \lambda_2 & -(\lambda_2 + \lambda_6) & 0 & 0 & \dots \\
 & \dots & & & & & & \dots
 \end{array}$$

De Q, A₀, A₁ et A₂ sont déduites :

$$A_0 = \begin{bmatrix} \lambda_5 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, A_1 = \begin{bmatrix} -(\lambda_1 + \lambda_5) & \lambda_1 \\ \lambda_2 & -(\lambda_2 + \lambda_6) \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda_6 \end{bmatrix}$$

A partir de ces matrices, on calcule la matrice R solution de l'équation : $A_0 + RA_1 + R^2 A_2 = 0$.

Trois solutions existent :

$$\begin{matrix} R_1 = \\ R_3 = \end{matrix} \begin{bmatrix} (\lambda_5 \lambda_6 - \lambda_1 \lambda_2) / \lambda_6 (\lambda_1 + \lambda_5) & -\lambda_1 / \lambda_6 \\ -\lambda_2 (\lambda_2 + \lambda_6) / \lambda_6 (\lambda_1 + \lambda_5) & -(\lambda_2 + \lambda_6) / \lambda_6 \end{bmatrix} \quad , \quad R_2 = \begin{bmatrix} \lambda_5 (\lambda_2 + \lambda_6) / \lambda_6 (\lambda_1 + \lambda_5) & \lambda_5 / \lambda_6 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 / \lambda_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Afin d'avoir une solution unique de la probabilité stationnaire, une seule matrice R est choisie de telle manière que (I-R) soit inversible (Equation de Normalisation).

La matrice qui est inversible est R₂. Donc, notre choix est R = R₂. Nous résolvons alors le système d'équations suivant pour retrouver la probabilité stationnaire π_{SR1} :

$$\begin{cases} i = 0 & : \pi_0 B_{0,0} + \pi_1 B_{1,0} = 0 \\ i = 1 & : \pi_0 B_{0,1} + \pi_1 (RA_2 + B_{1,1}) = 0 \\ i = 2 & : \pi_1 A_0 + \pi_2 A_1 + \pi_3 A_2 = 0 \\ \text{Normalisation} & : \pi_0 1 + \pi_1 (I-R)^{-1} 1 = 1 \end{cases}$$

Avec :

$$B_{0,0} = \begin{bmatrix} -(\lambda_1 + \lambda_5) & \lambda_1 \\ \lambda_2 & -(\lambda_2 + \lambda_6) \end{bmatrix}$$

$$B_{1,1} = A_1$$

$$B_{0,1} = A_0$$

$$B_{1,0} = A_2$$

$$\pi_i = (\pi_{i1}, \pi_{i2}) .$$

Par conséquent, nous obtenons les résultats suivants

$$\pi_0 = (\lambda_2 (\lambda_1 \lambda_6 - \lambda_2 \lambda_5) / \lambda_6 (\lambda_1 + \lambda_5) (\lambda_1 + \lambda_2), \quad (\lambda_1 \lambda_6 - \lambda_2 \lambda_5) / (\lambda_1 + \lambda_2))$$

$$\pi_1 = (\lambda_2 \lambda_5 (\lambda_1 \lambda_6 - \lambda_2 \lambda_5) (\lambda_6 + \lambda_2) / \lambda_6^2 (\lambda_1 + \lambda_5)^2 (\lambda_1 + \lambda_2), \quad \lambda_2 \lambda_5 (\lambda_1 \lambda_6 - \lambda_2 \lambda_5) / \lambda_6^2 (\lambda_1 + \lambda_5) (\lambda_1 + \lambda_2))$$

$$\pi_{i+1} = \pi_1 R^i \quad (1)$$

Après avoir calculé la probabilité stationnaire jusqu'au k^{ieme} niveau (càd 1^{er} niveau), nous utilisons la formule (1) pour calculer la formule stationnaire globale de SR₁.

8.2.2. Analyse de SR2

De la même manière et compte tenu de la similitude de SR₁ et SR₂, L'analyse de SR₁ est identique à celle de SR₂.

8.3. Calcul de la probabilité stationnaire de R

La solution stationnaire globale de R sera égale à : $\pi_{\text{Globale}} = \pi_{\text{SR1}} \otimes \pi_{\text{SR2}}$

En notant :

$$\begin{aligned}\pi_{\text{SR1}} &= (\pi_0^1, \pi_1^1, \dots, \pi_{i+1}^1 R^i, \dots), \\ \pi_{\text{SR2}} &= (\pi_0^2, \pi_1^2, \dots, \pi_{i+1}^2 R^i, \dots),\end{aligned}$$

le produit de Kronecker de π_{SR1} et π_{SR2} est égal à :

$$\pi_{\text{Globale}} = (\pi_0^1 \pi_0^2, \pi_0^1 \pi_1^2, \dots, \pi_0^1 \pi_{i+1}^2 R^i, \dots, \pi_1^1 \pi_0^2, \pi_1^1 \pi_1^2, \dots, \pi_1^1 \pi_{i+1}^2 R^i, \dots).$$

8.4. Calcul des indices de performance

Les indices de performance sont en général des fonctions définies sur l'espace des états du modèle. Pour pouvoir les mesurer, il est préférable de les écrire en fonction des probabilités stationnaires des sous-réseaux, ou encore, il est plus intéressant de les écrire en fonction des indices de performance des sous-réseaux.

En effet, il est plus facile de calculer d'abord les mesures de performance d'un sous-réseau, puis de calculer celles du RDPS global. De plus, il est possible de réduire la complexité des calculs des paramètres de performance d'un sous-réseau, et quelquefois éviter de calculer la totalité des probabilités stationnaires grâce à des résultats mathématiques.

Exemple : →

Soit $r : N \times M \rightarrow R$ une fonction désignant un indice de performance, définie sur l'espace des états d'un sous-réseau. On calcule la moyenne de cet indice :

$$E(r) = \sum_{I=0}^{\infty} \sum_{m \in S'(i)} \pi_{i,m} r(i,m)$$

Si r ne dépend que du numéro du niveau et non des états inter-niveaux, c'ad :

$$r(i,m) = r(i,m'), \forall m, m' \in S'(i), i \in \mathbb{N}.$$

On peut alors écrire $r(i) = r(i,m)$, et en conséquence :

$$E(r) = \sum_{I=0}^{\infty} r(i) (\pi_i 1^T)$$

Si $r(i) = i$, nous pouvons utiliser les résultats des séries géométriques, sans avoir à calculer la somme infinie des probabilités stationnaires.

9. Conclusion

Dans ce travail, nous avons introduit une nouvelle méthode d'analyse des RDPS non bornés. Cette méthode s'appuie sur une technique de décomposition du RDPS en des sous-réseaux ayant au plus une place non bornée et analysables, soit à l'aide de la méthode matricielle géométrique de [HAV95], ou bien à l'aide de la méthode d'approximation stochastique définie en [SAL2002].

Cette méthode permet de pallier au problème d'explosion combinatoire dans le cas non borné en ramenant l'analyse d'un RDPS à l'analyse de ses parties, puis utiliser l'algèbre tensorielle pour regrouper les solutions des différentes parties afin de composer la solution stationnaire globale.

Il est à noter également que la méthode a été développée dans un souci de pouvoir analyser des RDPS non bornés (ce qui n'était pas possible auparavant).

Nous envisageons dans le futur le raffinement de la méthode de décomposition pour englober plus de cas de RDPS, étant donné que la décomposition telle qu'elle est définie restreint son applicabilité.

REFERENCES

- [DAV81] : M.Davio, 1981. Kroenecker products and shuffle algebra. IEEE Trans. on Computers. C-30 (2).February 1981.
- [DON91] : S.Donatellia nd M.Sereno, 1991. On the product form solution for Stochastic Petri Nets. IEEE. pp.154-172.
- [DUT89] :C.Dutheillet and S.Haddad, 1989. Aggregation of states in coloured Petri nets : Application to a multiprocessor architecture. IEEE .pp.40-49. PARIS.
- [DUT92] : C.Dutheillet, 1992. Symétrie dans les réseaux de Petri colores: Définitions, analyse et application a l'évaluation des performances. Thèse de Doctorat, Université Paris 6, Mars 1992.
- [FLO85] : G.Florin and S.Natkin, 1985. On open synchronized queuing networks. In Proc. of the Int'l Workshop on Timed Petri Nets, pp.223-226. IEEE Computer Society Press.
- [FLO86] : G. Florin and S.Natkin, 1986. One place unbounded Stochastic Petri Nets : Ergodicity criteria and steady-state solution. Journal of Systems and Software 1 (2). pp.103-115.
- [FLO87] : G.Florin and S.Natkin, 1987. A necessary and sufficient saturation condition for open synchronised queuing Networks. Proc. of the 2nd Int'l Workshop on Petri Nets and Performance Models, pp.4-13.
- [FLO88] : G.Florin and S.Natkin, 1988. Solutions en forme produit matriciel pour les réseaux de files d'attente synchronisés fermes monovalués. Rapport de recherche CEDRIC No 88-26.
- [FLO89] : G.Florin and S.Natkin, 1989. Matrix product form solution for closed synchronised queuing networks. IEEE. pp.29-37.
- [GRA92] : M.Granda et al, 1992. Performance evaluation of parallel systems by using unbounded Generalised Stochastic Petri Nets. IEEE Transactions on Software Engineering, Vol.18, N0 1,pp.55-71.Spain. January 1992.
- [HAD95] : S.Haddad et al, 1995. Symbolic reachability graph and partial symmetries. Tech. Report of Masi lab., P&M.Curie university, Paris. N0 95.30, Mars 95.
- [HAD97]: S.Haddad and P.Moreaux, 1997. Aggregation and decomposition for performance evaluation of asynchronous product of high level Petri Nets. Document N°102. Mai 1997. Lamsade. Université de PARIS Dauphine.
- [HAV95] : B.R.Haverkort, 1995. Matrix-geometric solution of infinite stochastic Petri nets. In Proc. of the 1st Int'l Computer Performance and dependability symposium. Computer Society Press.
- [HAV96] : B.R.Haverkort, 1996. SPN2MGM : Tool Support for matrix- geometric Stochastic Petri Nets. Proc. IPDS96, pp.219-228, IEEE CS Press.
- [HAV97] : B.R.Haverkort and A.Ost, 1997. Steady-State analysis of Infinite Stochastic Petri Nets : Comparing the spectral expansion and the matrix-geometric method. In Proc. IEEE Computer Society press, pp.36-45.
- [HEN89] : W.Henderson and P.G.Taylor, 1989. Aggregation methods in exact performance analysis of Stochastic Petri Nets. IEEE, pp.12-17.
- [IOU96] : M.Ioualalen and A.Aissani, 1996. Symétries dans les Réseaux de Petri Stochastiques. Construction du graphe symbolique. 6ème Atelier de l'évaluation des performances. Novembre 96. Versailles.
- [IOU98] : M.Ioualalen et al, 1998. Réductions dans les Réseaux de Petri Stochastiques. Construction du graphe symbolique. Application à l'évaluation des performances. 4ème Colloque Africain sur la recherche en Informatique. Dakar, Sénégal. 12-15 Octobre 98.
- [MAR79] : A.W.Marshall and I.Olkin, 1979. Inequalities: Theory of majorization and its applications. Academic Press. Mathematics in Science and Engineering, Vol. 143.
- [PLA91] : B.Plateau and J.M.Fourneau, 1991. A methodology for solving Markov models of parallel systems. Journal of Parallel and Distributed Computing, 12, pp 370-387.
- [SAL2002] : N. Salmi , 2002. Méthode d'approximation stochastique pour l'évaluation des performances d'un réseau de Petri Stochastiques une place non bornée. USTHB, Institut d'Informatique. ALGERIE.
- [ST076] : D.Stoyan, 1976. Comparison methods for queues and other Stochastic models. J.Wiley and Son.
- [SHA94] : M.Shaked and J.G.Shanthikumar, 1994. Stochastic orders and their applications. Academic Press, NY.
- [TRU95] : L.Truffet, 1995. Méthodes de calcul de bornes stochastiques sur des modèles de systèmes et de réseaux. Thèse de Doctorat, Université de Paris 6, Novembre 1995.
- [ZUB89]: W.M.Zuberek, 1989. Performance evaluation using unbounded Timed Petri Nets. IEEE, pp.180-186, Canada.